9 класс

1. *Ответ.* Могут.

Решение. Если первый мудрец назвал число 22, то второй может однозначно определить все числа, так как сумму 100 можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

2. См. решение задачи 2 для 8 класса.

3. *Первое решение.* Пусть углы треугольника ABC равны $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Тогда

$$\angle B'AO = \angle CAO = 90^\circ - \beta, \quad \angle A'BO = \angle CBO = 90^\circ - \alpha.$$

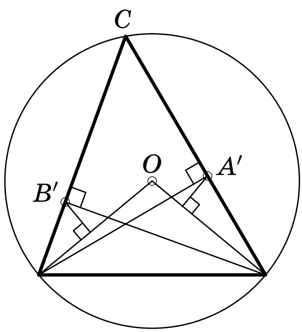
Значит, расстояние от точки A' до прямой BO равно

$$A'B \sin \angle A'BO = A'B \sin(90^\circ - \alpha) = A'B \cos \alpha = AB \cos \beta \cos \alpha,$$

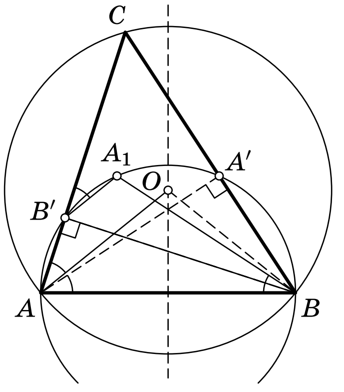
а расстояние от точки B' до прямой AO равно

$$AB' \sin \angle B'AO = AB' \sin(90^\circ - \beta) = AB' \cos \beta = AB \cos \alpha \cos \beta.$$

Таким образом, эти расстояния равны.



Второе решение. Рассмотрим симметрию относительно серединного перпендикуляра к AB. Пусть образом точки A' является точка A_1. Образом прямой OB является прямая OA, следовательно, расстояние от точки A' до прямой OB равно расстоянию от точки A_1 до прямой OA. Таким образом, задача сводится к доказательству равноудаленности точек A_1 и B' от прямой OA, иными словами, необходимо доказать $B'A_1 \parallel OA$.



Основания A' и B' высот лежат на окружности, построенной на AB как на диаметре. Так как эта окружность при рассмотренной симметрии переходит в себя, точка A_1 также лежит на этой окружности и четырехугольник $AB'A_1B$ — вписанный, значит, $\angle CB'A_1 = \angle A_1BA$. В свою очередь, из соображений симметрии $\angle A_1BA = \angle A'AB = 90^\circ - \angle B$. И $\angle CAO = 90^\circ - \angle B$, следовательно, $B'A_1 \parallel OA$ по признаку.

Третье решение. Пусть CC' — третья высота. Тогда A, B, C — центры вневписанных окружностей треугольника $A'B'C'$. Поскольку $AO \perp B'C'$, $BO \perp A'C'$, расстояния от A' до BO и от B' до AO равны отрезкам касательных к соответствующим окружностям.

4. *Ответ.* 1/2.

Решение. Обозначим числа в вершинах как x_1, x_2, ..., x_{100}. Тогда сумма чисел на красных отрезках (обозначим ее за R) есть сумма всех попарных произведений чисел, стоящих на позициях с разной четностью:

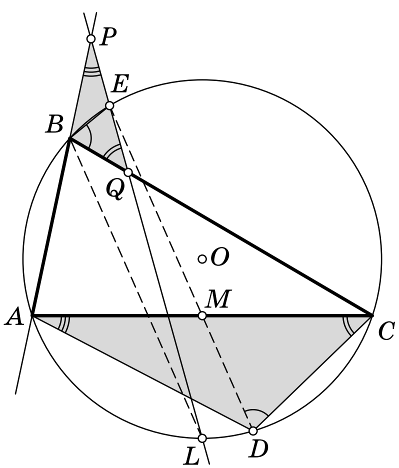
$$R = x_1x_2 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_{100} + x_3x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_3x_{100} + \ldots$$
$$\ldots + x_{99}x_{100} = x_1(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) +$$
$$+ x_3(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) + \ldots + x_{99}(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) =$$
$$= (x_1 + x_3 + \ldots + x_{99})(x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}) = PQ,$$

где $P = x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}$, а $Q = x_2 + x_4 + \ldots + x_{100}$. Сумма на синих отрезках (обозначим ее за B) есть сумма всех попарных произведений чисел, стоящих на позициях с одинаковой четностью: $B = x_1x_3 + \ldots + x_{97}x_{99} + x_2x_4 + \ldots + x_{98}x_{100}$. Учитывая, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 = 1$, запишем, что

$$2B + 1 = x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_{99}^2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_{97}x_{99} +$$
$$+ x_2^2 + x_4^2 + \ldots + x_{100}^2 + 2x_2x_4 + \ldots + 2x_{98}x_{100} =$$
$$= (x_1 + x_3 + \ldots + x_{99})^2 + (x_2 + x_4 + \ldots + x_{100})^2 = P^2 + Q^2.$$

Искомая разность $R - B = PQ - \frac{P^2 + Q^2 - 1}{2} = \frac{1 - (P - Q)^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Указанная оценка достигается, например, при $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_{100} = \frac{1}{10}$ или при $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{100} = 0$.

5. *Первое решение.* Продлим EM до пересечения с окружностью в точке D. Докажем, что $\triangle BPQ \sim \triangle DAC$, причем отрезку BE соответствует медиана DM.



Без ограничения общности, будем считать, что точка P лежит на продолжении AB. Учитывая, что между параллельными хордами BL и ED заключены равные дуги, а биссектриса BL делит дугу AC на две равных, запишем:

$$\angle P = \frac{\smile AL - \smile BE}{2} = \frac{\smile CL - \smile DL}{2} = \frac{\smile CD}{2} = \angle A.$$

И аналогично

$$\angle Q = \frac{\smile CL + \smile BE}{2} = \frac{\smile AL + \smile LD}{2} = \frac{\smile AD}{2} = \angle C.$$

Следовательно, $\triangle BPQ \sim \triangle DAC$. Осталось заметить, что $\angle QBE$ и $\angle CDM$ равны, так как опираются на одну дугу. Значит, медиане DM соответствует отрезок BE, и он сам является медианой $\triangle BPQ$, $PE = EQ$.

Второе решение.[1] Пусть прямая EM пересекает AB и BC в точках P' и Q' соответственно. Также обозначим $\angle BAE = \angle BLE = \angle BCE = \angle QEQ' = \angle PEP' = \alpha$ и $\angle ABL = \angle CBL = \angle AEM = \angle CEM = \beta$ (указанные углы равны, как опирающиеся на одну дугу и углы при параллельных прямых). Последовательно применяя теорему синусов для треугольников $\triangle PP'E$, $\triangle AP'E$ и $\triangle AP'M$, получим:

$$PE = \frac{P'E \cdot \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AP' \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} =$$
$$= \frac{AM \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\beta \cdot \sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AC \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha}{2\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}.$$

Аналогично, применяя теорему синусов для треугольников $\triangle QQ'E$, $\triangle CQ'E$ и $\triangle CQ'M$, получим:

$$QE = \frac{CM \cdot \sin\angle EMC \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\beta \cdot \sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)} = \frac{AC \cdot \sin\angle EMA \cdot \sin\alpha}{2\cdot\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}.$$

То есть $PE = QE$, что и требовалось доказать.

6. *Оценка.* Пронумеруем в каждой куче камни по порядку. Без потери общности можно считать, что Петя, выбрав кучку, всегда берет из нее камень с наибольшим номером. Ясно, что каждый ход приносит столько очков, чему равна разность между большим и меньшим из чисел на камнях, взятых на этом ходу.

---

[1] Это решение основано на работе Якова Богданова.

Первый способ. Пусть Петя набрал $P=a_1-b_1+a_2-b_2+$ $+\ldots+a_n-b_n$ очков, где a_i и b_i — соответственно большее и меньшее числа на камнях, выбранных Петей на ходу с номером i, а $n=20000$ — общее число ходов. Заметим, что среди чисел a_1, b_1, …, a_n, b_n каждое число от 1 до 400 встречается ровно 100 раз, так как в каждой кучке из ста кучек на камнях написаны все различные числа от 1 до 400. Пусть $S=a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_n+b_n=(1+2+\ldots+400)\cdot 100$, а $B=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Тогда $P=S-2B$, и задача сводится к оценке наименьшего возможного значения числа B.

Заметим, что каждое число от 1 до 400 хотя бы раз встретится среди чисел a_1, …, a_n, так как каждое число хотя бы раз за игру будет наибольшим среди написанных на камнях. Аналогично, каждое число от 1 до 400 хотя бы раз встретится и среди чисел b_1, …, b_n, так как каждое число хотя бы раз за игру будет наименьшим среди написанных на камнях. С учетом сказанного, в наборе b_1, …, b_n может быть не менее чем по одному и не более чем по 99 каждого из чисел от 1 до 400, следовательно,

$$B\geqslant(1+2+\ldots+200)\cdot 99+201+202+\ldots+400.$$

В свою очередь,

$$\begin{gathered}P=S-2B\leqslant(1+2+\ldots+400)\cdot 100-2\cdot(1+2+\ldots+200)\cdot 99-\\-2\cdot(201+202+\ldots+400)=\\=(201+202+\ldots+400)\cdot 98-(1+2+\ldots+200)\cdot 98=\\=200\cdot 200\cdot 98=3\,920\,000.\end{gathered}$$

Второй способ. Для каждого $n\in\{1,\ldots,399\}$ подсчитаем d_n — число таких ходов, что ровно на одном из двух камней, которые берет Петя, написано число, большее n. Тогда сумма по всем таким d_n в точности равна сумме очков в конце игры. В самом деле, ход, в который Петя взял камни с числами a и b ($a\geqslant b$), увеличит на единицу числа d_b, d_{b+1}, …, d_{a-1} — всего как раз $a-b$ чисел.

При $n\leqslant 200$ справедливо неравенство $d_n\leqslant 98n$, так как всего камней с номерами, меньшими либо равными n, $100n$ штук, но последними n ходами мы берем по два таких камня, потому что других уже не осталось. Для $n>200$ верна оценка $d_n\leqslant 98\cdot(400-n)$, так как всего камней с номерами, большими n, $100 \cdot (400 - n)$ штук, но первыми n ходами мы берем по два таких камня, потому что другие еще не доступны. Суммируя эти оценки, получаем

$$98(1 + 2 + \ldots + 199 + 200 + 199 + \ldots + 2 + 1) = 98 \cdot 200 \cdot 200.$$

Пример. Разобьем ходы Пети на 100 серий по 200 ходов, в первой серии будем брать камни из первой и второй кучки, во второй — из второй и третьей, и так далее. Последней серией ходов заберем оставшиеся камни из сотой и первой кучки. Тогда ходы из первой и последней серий очков не приносят, а любой другой ход приносит 200 очков. Всего таких ходов $98 \cdot 200$, значит, Петя наберет $98 \cdot 200 \cdot 200 = 3\,920\,000$ очков.